INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CONSTANŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanţa, 16.02.2013
Clasa a XI-a
Barem de corectare şi notare

Subiectul 1

Fie $C = AB - BA$ **a)** ${}^tC = {}^t(AB) - {}^t(BA) = {}^tB\,{}^tA - {}^tA\,{}^tB = -BA + AB = C$ 1p

$TrC = 0 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$ .... 1p; $\det C = -x^2 - y^2 \le 0$ 1p

b) $(A+B)\cdot {}^t(A+B) = (A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2 - (AB - BA) = A^2 - B^2 - C$ 1p

${}^t(A+B)\cdot(A+B) = (A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2 + (AB - BA) = A^2 - B^2 + C$ 1p

Deducem că $\det(A^2 - B^2 + C) + \det(A^2 - B^2 - C) = [\det(A+B)]^2 + [\det(A+B)]^2 \ge 0$

Dar $\det(A^2 - B^2 + C) + \det(A^2 - B^2 - C) = 2\cdot[\det(A^2 - B^2) + \det C]$ 1p

şi deci $\det(A^2 - B^2) + \det C \ge 0 \Rightarrow \det(A^2 - B^2) \ge -\det C \ge 0$ (din punctul a)) 1p

Observaţie. Demonstraţia se poate face şi prin calcul direct.

Subiectul 2

a) Presupunem că A este inversabilă. Din $AB - BA = A \Rightarrow ABA^{-1} - B = I_2$ 1p

$Tr(ABA^{-1} - B) = 2$ .... **1p**; contradicţie cu $Tr(ABA^{-1} - B) = Tr(ABA^{-1}) - TrB = TrB - TrB = 0$. 1p

Deci A nu este inversabilă.

b) Din punctul a) avem că $\det A = 0$. Cum $TrA = Tr(AB - BA) = 0$ rezultă, din teorema Cayley-Hamilton, că

$A^2 = O_2$ ..... **2p**; Demonstrăm prin inducţie matematică faptul că $AB^nA = O_2$ pentru orice $n \ge 1$........ **2p**

$n = 1$: $ABA = (A + BA)A = A^2 + BA^2 = O_2$ Presupunem că $AB^nA = O_2$. Din

$AB = BA + A \Rightarrow AB^{n+1} = BAB^n + AB^n \Rightarrow AB^{n+1}A = BAB^nA + AB^nA = O_2$. Aşadar $AB^nA = O_2$ pentru orice $n \ge 1$.

Subiectul 3

Notăm $P_n = f(a_1)\cdot f\left(\frac{a_2}{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{a_n}{n}\right)$, $P_n > 0 \Rightarrow b_n = \sqrt[n]{P_n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)$ 1p

$\frac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n} = a_{n+1} - a_n = f\left(\frac{a}{n+1}\right) \to 0$ 2p

Atunci, din lema Cesaro – Stolz se obţine că $\frac{a_n}{n} \to 0 \Rightarrow f\left(\frac{a_n}{n}\right) \to 0$ 2p

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 2p

Subiectul 4

a) $\ln\frac{n+1}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{n} + \ln\frac{n}{x_n}$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow \ln\frac{n+1}{x_{n+1}} - \ln\frac{n}{x_n} = \frac{x_n}{n} > 0$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow \frac{n+1}{x_{n+1}} > \frac{n}{x_n}$ $\forall n \ge 2$ 1p

Deci $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge 2}$ este un şir strict descrescător şi cum este format din numere strict pozitive, rezultă că este convergent.
.... 1p

$\ln\frac{n+1}{x_{n+1}} - \ln\frac{n}{x_n} = \frac{x_n}{n} > 0$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow \frac{n+1}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_n}{n} = e^{\frac{x_n}{n}}$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow \frac{x_n}{n} = \frac{x_{n+1}}{n+1}\cdot e^{\frac{x_n}{n}}$, $\forall n \ge 2$. (1) 1p

Fie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = x \in \mathbf{R}$. Din (1), prin trecere la limită, deducem $x = x\cdot e^x \Rightarrow (e^x - 1)\cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$ 1p

b) Scriem $x_n = \frac{n}{\frac{n}{x_n}}$. Cum $\frac{x_n}{n} > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{x_n} = +\infty$ şi este strict crescător, putem aplica criteriul Stolz-Cesaro. 2p

$$\frac{n+1-n}{\frac{n+1}{x_{n+1}} - \frac{n}{x_n}} = \frac{1}{e^{\frac{x_n}{n}}\cdot\frac{x_n}{n} - \frac{x_n}{n}} = \frac{\frac{x_n}{n}}{e^{\frac{x_n}{n}} - 1} \to 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$ 1p